CP n° 5 - Fonctions usuelles

1 Fonctions puissances

1.1 Introduction

- Pour rappel, si x est un élément d'un ensemble E muni d'une «multiplication» — un réel, un complexe, une matrice, une fonction, un polynôme... — alors on définit x^n pour tout $\boxed{n \in \mathbb{N}}$ par

$$x^n := \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}.$$

  En particulier x^0 est un produit vide et vaut donc l'élément neutre pour la multiplication, à savoir 1 pour les nombres, la matrice identité pour les matrices, la constante à 1 pour les fonctions, le polynôme 1 pour les polynômes...
- Si en outre x est inversible — nombre non nul, matrice inversible, fonction ne s'annulant jamais — on dispose alors de son «inverse» x^{-1} ce qui permet de définir pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x^{-n} := \left(x^{-1}\right)^n.$$

  On a ainsi défini x^n pour tout $\boxed{n \in \mathbb{Z}}$.
- Plaçons-nous dans le cas particulier où x est un réel strictement positif. Sur $\mathbb{R}_+^*$, on dispose de la fonction ln, ce qui permet d'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ x^n = (\exp(\ln(x)))^n = \exp(n \ln(x)).$$

  On s'aperçoit que cette dernière expression $\exp(n \ln(x))$ a du sens y compris si n n'est pas entier. Cela incite à étendre la définition, en posant pour tout $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$:

$$x^\alpha := \exp(\alpha \ln(x)).$$

1.2 Définition des puissances d'exposant quelconque et règles de calcul

Définition (Puissances quelconques)**.** *Soit x un réel **strictement positif** et α un réel **quelconque**. On pose :*

$$x^\alpha := \exp(\alpha \ln(x)).$$

Remarque. *Rigoureusement parlant, c'est à ce moment-là, après avoir donné cette définition, que l'on peut utiliser la notation e^t plutôt que $\exp(t)$, pour un réel t. Pour cela, on pose le réel :*

$$e := \exp(1)$$

et on constate alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^t = \exp(t \ln(e)) = \exp(t)$$

La définition de x^α peut alors être écrite de la façon suivante (celle que l'on écrit en pratique) :

$$\boxed{x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \quad , \quad \textit{pour tous } x > 0 \textit{ et } \alpha \in \mathbb{R}}$$

Proposition (Règles de calcul)**.** *Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a*

1. $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$,
2. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$,
3. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ *et* $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$,
4. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$,
5. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

dem : en effet, grâce aux propriété de exp et ln, on a

1.
$$x^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln(x)} = \frac{1}{e^{\alpha \ln(x)}} = \frac{1}{x^\alpha}$$

2.
$$\ln(x^\alpha) = \ln\left(e^{\alpha \ln(x)}\right) = \alpha \ln(x)$$

3.
$$\begin{aligned}
(xy)^\alpha &= e^{\alpha \ln(xy)} \\
&= e^{\alpha(\ln(x)+\ln(y))} \\
&= e^{\alpha \ln(x)+\alpha \ln(y)} \\
&= e^{\alpha \ln(x)} e^{\alpha \ln(y)} \\
&= x^\alpha y^\alpha \\
\text{et } \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha &= e^{\alpha \ln\left(\frac{x}{y}\right)} \\
&= e^{\alpha(\ln(x)-\ln(y))} \\
&= e^{\alpha \ln(x)-\alpha \ln(y)} \\
&= \frac{e^{\alpha \ln(x)}}{e^{\alpha \ln(y)}} \\
&= \frac{x^\alpha}{y^\alpha},
\end{aligned}$$

4.
$$x^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)\ln(x)} = e^{\alpha \ln(x)+\beta \ln(y)} = e^{\alpha \ln(x)} e^{\beta \ln(x)} = x^\alpha x^\beta$$

5.
$$(x^\alpha)^\beta = e^{\beta \ln(x^\alpha)} = e^{\beta\alpha \ln(x)} = x^{\alpha\beta}$$

Remarque. *En particulier, pour tout réel $x > 0$, le nombre $x^{\frac{1}{2}}$ est positif, et vérifie quand on le met au carré :*

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{2}{2}} = x^1 = x$$

donc $x^{\frac{1}{2}}$ est l'unique nombre positif qui, mis au carré, donne x. Autrement dit : $\boxed{x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}}$.

Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

donc $x^{\frac{1}{n}}$ est l'unique antécédent positif de x par $t \mapsto t^n$, d'où $\boxed{x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}}$.

1.3 Étude des fonctions puissances $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$

Fixons α un réel et notons

$$f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \end{array}$$

- **Dérivation et variation**
  Par composition de fonctions dérivables, f_α l'est et

$$\boxed{\forall x > 0\,,\ f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x}\, e^{\alpha \ln(x)} = \alpha\, \frac{x^\alpha}{x^1} = \alpha x^{\alpha-1}}$$

  qui est du signe de α de sorte que :
  — si $\alpha = 0$, f_α est constante ;
  — si $\alpha < 0$, f_α est strictement décroissante ;
  — si $\alpha > 0$, f_α est strictement croissante.

- **Limites en 0^+ et $+\infty$, prolongements en 0**
  Par opérations sur les limites, on a si $\alpha < 0$, puisque $\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ et $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  et de même si $\alpha > 0$

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  et on prolonge donc f_α par la valeur 0 en 0 dans ce cas : $\boxed{0^\alpha := 0\ ,\ \text{lorsque } \alpha > 0}$

  f_0 est la constante à 1, donc on prolonge bien évidement f_0 par la valeur 1 en 0, ce qui, d'une certaine manière, donne la convention : $\boxed{0^0 := 1}$

- **Bijectivité**
  Dans tous les cas où $\alpha \neq 0$, f_α réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, et sa bijection réciproque est $f_{\frac{1}{\alpha}}$. On peut le montrer facilement à l'aide des règles de calcul. En effet, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la propriété

$$\forall x > 0\,,\ (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

  signifie précisément

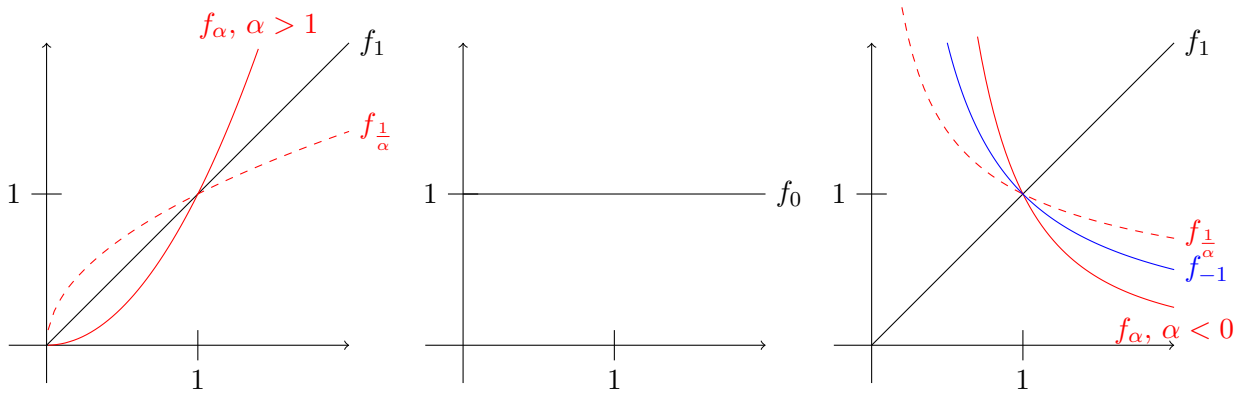
$$f_\beta \circ f_\alpha = f_{\alpha\beta}$$

  D'où, pour tout $\alpha \neq 0$:

$$f_\alpha \circ f_{\frac{1}{\alpha}} = f_{\alpha\frac{1}{\alpha}} = f_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*} \qquad \text{et} \qquad f_{\frac{1}{\alpha}} \circ f_\alpha = f_{\frac{1}{\alpha}\alpha} = f_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}$$

  ce qui montre que f_α et $f_{\frac{1}{\alpha}}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

- **Graphes**



• **Théorèmes de croissances comparées**

Proposition (Croissances comparées)**.** *Soit α, β et γ trois réels strictement positifs, alors*

► *en $+\infty$, on a :*

$$\frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+ \quad \text{et} \quad \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$$

ce qui donne les comparaisons suivantes — notations «physiciennes» :

$$\text{“} \quad 1 \ll (\ln(x))^\alpha \ll x^\beta \ll e^{\gamma x} \quad \text{”}.$$

► *en 0^+, on a :*

$$x^\alpha \left|\ln(x)\right|^\beta \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0^+$$

ce qui donne les comparaisons suivantes — notations «physiciennes» :

$$\text{“} \quad \underbrace{x^\alpha}_{\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0} \ll 1 \ll \underbrace{|\ln(x)|^\beta \ll \frac{1}{x^\gamma}}_{\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty} \quad \text{”}.$$

dem : elle repose essentiellement sur l'inégalité de convexité $\ln(x) \leqslant x$ qu'on applique avec $x = y^\alpha$ en choisissant bien α.

Remarque. *En 0, il n'est besoin d'aucun théorème de croissance comparée concernant les quantités du type $e^{\gamma x}$ puisqu'elles tendent gentiment vers $e^0 = 1$.*

Ces croissances comparées permettent de lever de nombreuses «formes indéterminées» lors de la recherche d'éventuelles limites, à conditions de mettre à profit les quatre remarques suivantes :

Méthodologie sur le calcul des limites :

1. **Commencer par regarder les limites de chacun des composants de l'expression. Bien souvent il n'y a aucune indétermination.**
2. **En cas de problème, ramener l'étude au voisinage de 0 ou de $+\infty$ par un changement de variable. Exemples :**
   — **Si $x \to -\infty$, poser $t = -x$ de sorte que $t \to +\infty$.**
   — **Si $x \to 3$, poser $x = 3 + t$, c'est-à-dire $t = x - 3$, de sorte que $t \to 0$.**
3. **En cas de problème dans une somme, factoriser par le terme prépondérant. Faire cela au numérateur et au dénominateur dans le cas d'un quotient.**
4. **Ne jamais écrire aucun «lim». Ce symbole ne sert à rien, sauf à polluer inutilement les calculs ou à faire des erreurs de logique en parlant de limite avant d'avoir montré l'existence de cette limite. On commence par manipuler une expression, jusqu'à la mettre sous une forme qui n'entraîne plus d'indétermination, puis on passe à la limite avec le symbole «$\underset{x\to}{\longrightarrow}$».**

Exemples :

1. Étudier l'éventuelle limite lorsque $x \to +\infty$ de $f(x) := \dfrac{4e^x - 3x^4 + 1}{\ln(x) + 5x^2}$.

   On a pour tout x suffisamment grand pour que le dénominateur ne s'annule pas (par exemple $x \geqslant 1$) :

$$f(x) = \frac{\boxed{4e^x} - 3x^4 + 1}{\ln(x) + \boxed{5x^2}} = \underbrace{\frac{4e^x}{5x^2}}_{=:u(x)} \times \underbrace{\frac{\boxed{1} - \frac{3x^4}{4e^x} + \frac{1}{4e^x}}{\frac{\ln(x)}{5x^2} + \boxed{1}}}_{=:v(x)}$$

   or par croissances comparées $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1$ donc par produit

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

2. Étudier l'éventuelle limite lorsque $x \to 0^+$ de $g(x) := \dfrac{1}{x} + \ln(x) + e^x$.

   On a pour tout réel $x > 0$,

$$g(x) = \boxed{\frac{1}{x}} + \ln(x) + e^x = \frac{1}{x}\underbrace{\left(\boxed{1} + x\ln(x) + xe^x\right)}_{=:w(x)}$$

   or $\frac{1}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et par croissances comparées $w(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 1$ donc par produit,

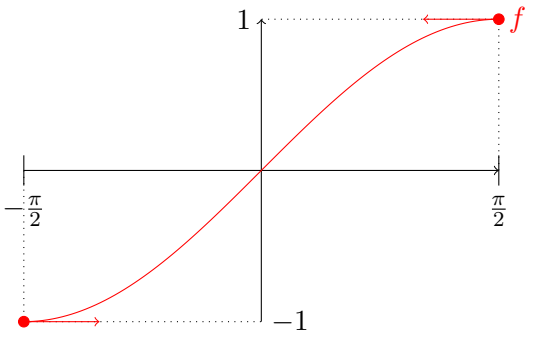
$$g(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

2 Fonctions circulaires réciproques

2.1 Fonction Arcsin

Pour rappel, la fonction sin, définie sur $\mathbb{R}$, est à valeurs dans $[-1,1]$. Elle n'est pas du tout injective, puisque chaque valeur de $[-1,1]$ est atteinte une infinité de fois (par exemple en raison de la périodicité de sin).
Pour rendre la fonction sin injective, on considère plutôt la restriction suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}.$$



f est ainsi :

- bien définie, car sin est à valeurs dans $[-1,1]$,
- dérivable cas sin l'est et en outre,

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ f'(x) = \cos(x) \geqslant 0$$

  avec égalité si et seulement si $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$. Ainsi f' est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points. Elle est donc strictement croissante et donc **injective**.
- Enfin, f est continue sur son intervalle de définition et $1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $-1 = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ donc pour tout réel y de $[-1,1]$, y admet un antécédent par f d'après le TVI : f est donc **surjective**.

Ainsi f est bijective. Sa réciproque s'appelle la fonction arc-sinus, notée Arcsin : $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; elle est continue — admis pour le moment. Étudions sa dérivabilité. Puisque le graphe de f présente des tangentes horizontales en $-\frac{\pi}{2}$ et en $\frac{\pi}{2}$, on en déduit que le graphe de Arcsin présente des tangentes verticales en $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et en $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$: Arcsin n'est donc pas dérivable en -1 ni en 1. En revanche la restriction de f à l'intervalle ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est dérivable de dérivée ne s'annulant pas. Donc d'après le théorème de dérivation des applications réciproques, Arcsin est dérivable sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$, et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{f'(\mathrm{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\mathrm{Arcsin}(x))}.$$

On peut simplifier l'expression $\cos(\mathrm{Arcsin}(x))$. En effet, en appliquant l'égalité

$$\cos^2(X) + \sin^2(X) = 1$$

à la quantité $X = \mathrm{Arcsin}(x)$, on obtient

$$\cos^2(\mathrm{Arcsin}(x)) + \sin^2(\mathrm{Arcsin}(x)) = 1$$

et comme $\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x$:

$$\cos^2(\mathrm{Arcsin}(x)) + x^2 = 1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \cos^2(\mathrm{Arcsin}(x)) = 1 - x^2$$

D'où :

$$\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{1-x^2}$$

Or, on sait que $\mathrm{Arcsin}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et la fonction cos est **positive** sur cette intervalle (penser au graphe). Donc $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) \geqslant 0$. D'où :

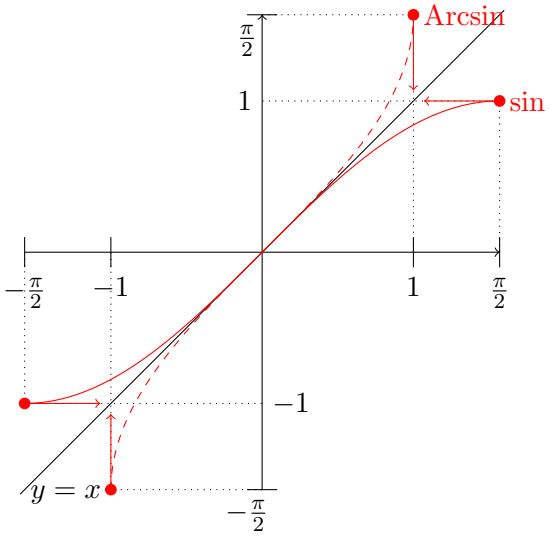
$$\boxed{\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}}$$

Proposition (Conclusion de l'étude). *La fonction* $x \mapsto \sin(x)$ *réalise une bijection strictement croissante de l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *sur l'intervalle* $[-1, 1]$. *Sa réciproque*

$$Arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

est strictement croissante, continue. Elle est aussi dérivable sur $]-1, 1[$ *par le théorème de dérivation des applications réciproques et*

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ Arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



Connaissant quelques valeurs remarquables de la fonction sin, on en déduit quelques valeurs de la fonction Arcsin :

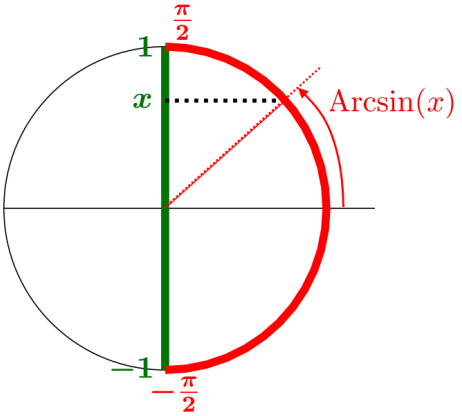
θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\theta)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

et donc

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\mathrm{Arcsin}(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

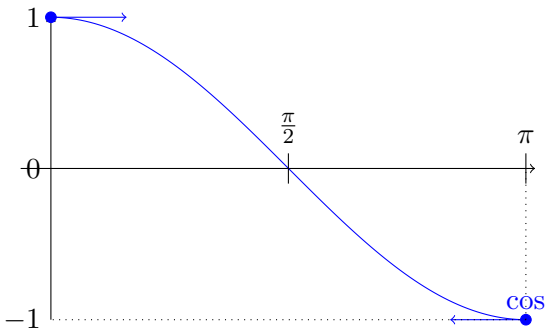
Remarques.

- ▶ *La fonction Arcsin est impaire — à méditer.*
- ▶ ≪*En fait qu'est-ce que Arcsin*(x) *?*
  - *Il s'agit de l'angle dont le sinus vaut* x.
  - *Lequel ?*
  - *Celui compris entre* $-\frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{2}$.≫



2.2 Fonction Arccos

De même que dans la partie précédente, on s'intéresse, pour rendre la fonction cos injective, à sa restriction à $[0, \pi]$



pour montrer le résultat suivant :

Proposition. *La fonction $x \mapsto \cos(x)$ réalise une bijection strictement décroissante de l'intervalle $[0, \pi]$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Sa réciproque*

$$Arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

est strictement décroissante, continue. Elle est aussi dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ Arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

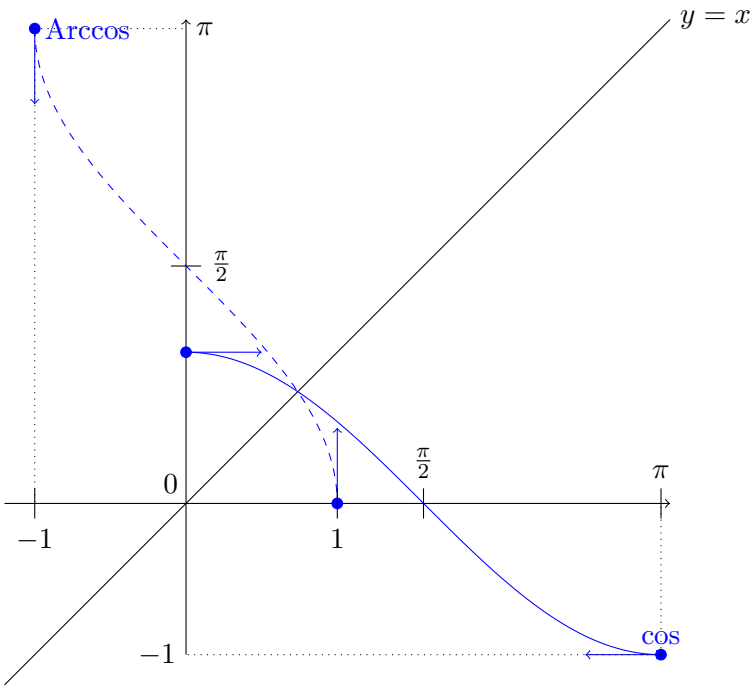
Le théorème de dérivation des applications réciproques donne initialement

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sin(\mathrm{Arccos}(x))}$$

et l'on prouve ensuite

$$\boxed{\sin(\mathrm{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}}$$

de façon similaire à $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$, en appliquant $\cos^2(X) + \sin^2(X) = 1$ à $X = \mathrm{Arccos}(x)$.



Connaissant quelques valeurs remarquables de la fonction cos, on en déduit quelques valeurs de la fonction Arccos :

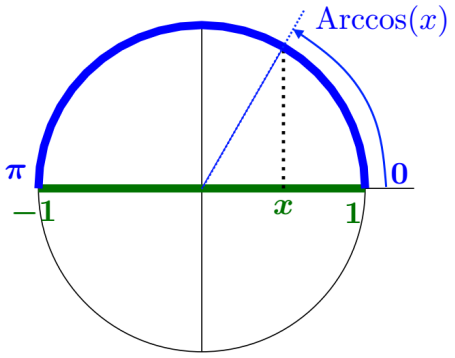
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

et donc

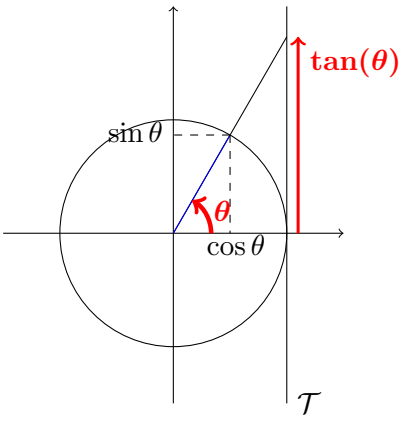
x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{Arccos}(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Remarques.

- ▶ *La fonction Arccos n'est pas paire — à méditer.*
- ▶ *≪En fait qu'est-ce que Arccos(x) ?*
  - *Il s'agit de l'angle dont le cosinus vaut x.*
  - *Lequel ?*
  - *Celui compris entre 0 et π.≫*



2.3 Fonction tan



Dans le plan $\mathbb{R}^2$, considérons le cercle trigonométrique $\mathcal{C} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2+y^2=1\}$ ainsi que sa tangente en le point de coordonnées $(1,0)$, $\mathcal{T} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x=1\}$. Pour tout réel θ qui n'est pas congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, la droite Δ_θ passant par l'origine et le point de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ coupe $\mathcal{T}$ en un point dont on note $\tan(\theta)$ l'ordonnée. D'après le théorème de Thales, on a $\frac{\tan(\theta)}{1} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

On considère alors la fonction, appelée tangente, suivante :

$$\tan : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} := \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \end{array}$$

qui est bien définie car son dénominateur ne s'annule pas. Elle est également dérivable par quotient de fonctions dérivables et pour tout $\theta \in \mathcal{D}$,

$$\tan'(\theta) = \frac{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(\theta)} \\ 1+\tan^2(\theta) \end{cases}$$

qui est strictement positif. tan est donc strictement croissante sur chaque intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$. Enfin, remarquons que pour tout réel $\theta \in \mathcal{D}$, remarquons que :

- d'une part $-\theta \in \mathcal{D}$ et

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -\tan(\theta)$$

et donc tan est impaire,
- et d'autre part $\theta + \pi \in \mathcal{D}$ et

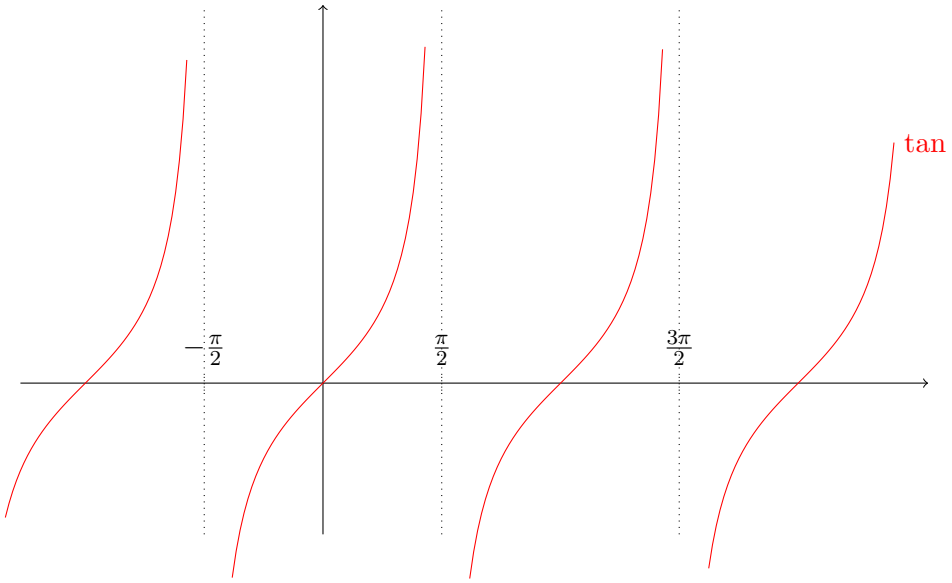
$$\tan(\theta+\pi) = \frac{\sin(\theta+\pi)}{\cos(\theta+\pi)} = \frac{-\sin(\theta)}{-\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

et donc tan est π-périodique.

Enfin, étudions le comportement asymptotique de tan en les $\frac{\pi}{2} + k\pi$: or par quotient de limites puis imparité

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{puis} \quad \tan(x) \underset{x\to-\frac{\pi}{2}^+}{\longrightarrow} -\infty$$

ce qui permet par π-périodicité d'obtenir toutes les autres limites.



2.4 Fonction Arctan

La π-périodicité de tan lui donne un défaut d'injectivité. On considère plutôt, et de façon quelque peu arbitraire, la restriction de tangente suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array}.$$

f est ainsi :
- bien définie, car cos ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,
- dérivable et strictement croissante et donc **injective**.
- Enfin, f est continue sur son intervalle de définition et par quotient de limites puis imparité

$$\tan(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{puis} \quad \tan(x) \underset{x\to-\frac{\pi}{2}^+}{\longrightarrow} -\infty$$

donc tout réel y admet un antécédent par f d'après le TVI : f est donc **surjective**.

Ainsi f est bijective. Sa réciproque s'appelle la fonction arc-tangente, notée Arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Étudions sa dérivabilité. Puisque f est dérivable de dérivée ne s'annulant pas, on en déduit que Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ par le théorème de dérivation des applications réciproques et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{f'(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Finalement, on a prouvé le résultat suivant :

Proposition. *La fonction*

$$\tan : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} := \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \end{array}$$

est π-périodique, impaire et dérivable et pour tout $\theta \in \mathcal{D}$,

$$\tan'(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(\theta)} \\ 1 + \tan^2(\theta) \end{cases} .$$

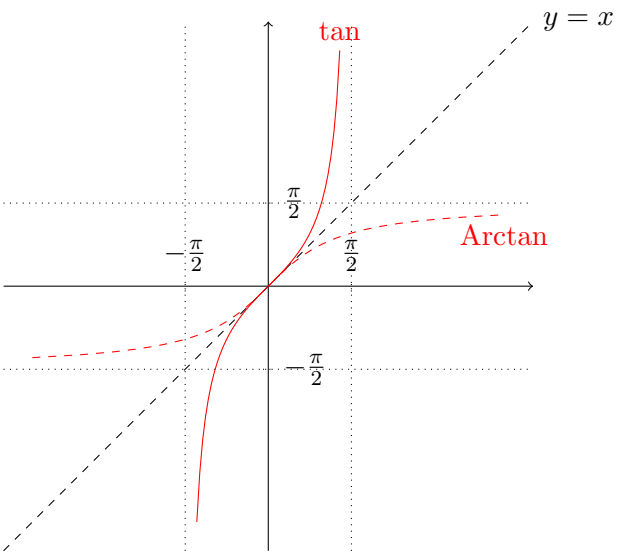
Ainsi tan *est strictement croissante sur chaque intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$. Elle induit donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]\lim\limits_{\frac{-\pi}{2}^+} \tan, \lim\limits_{\frac{\pi}{2}^-} \tan\right[= \mathbb{R}$ dont la réciproque, appelée arc-tangente*

$$Arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

est strictement croissante, impaire et dérivable et pour tout réel x,

$$Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On a également $Arctan(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$ et $Arctan(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$.



Connaissant quelques valeurs remarquables de la fonction tan, on en déduit quelques valeurs de la fonction Arctan :

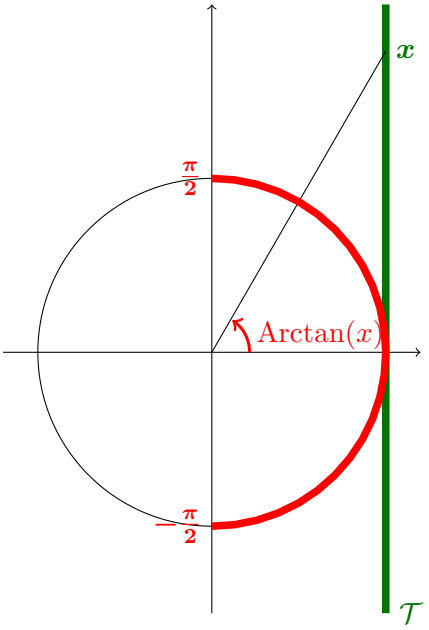
θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan(\theta)$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

et donc

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$Arctan(x)$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Remarques.

- *La fonction Arctan est impaire — à méditer.*
- *≪En fait qu'est-ce que $Arctan(x)$?*
  - *Il s'agit de l'angle dont la tangente est x.*
  - *Lequel ?*
  - *Celui compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.≫*



3 Fonction logarithme en base a

Définition. *Soit a un réel strictement positif différent de 1. La fonction logarithme en base a, notée $\log_a$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par la relation*

$$\boxed{\log_a(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

Remarque fondamentale : ainsi définie, cette fonction $\log_a$ vérifie le fait que pour tout réel strictement positif x et tout réel y, on a l'équivalence

$$\boxed{a^y = x \iff y = \log_a(x)}$$

En effet $a^y = e^{y.\ln a}$, donc il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} a^y = x &\iff e^{y.\ln a} = x \\ &\iff y.\ln a = \ln x \iff y = \tfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{aligned}$$

Autrement dit, tout comme ln qui est la fonction réciproque de $y \mapsto e^y$, la fonction $\log_a$ est la fonction réciproque de la fonction $y \mapsto a^y$. ln peut être alors vue comme étant la fonction logarithme en base e.

Exemple remarquable : la fonction logarithme en base 10 est notée logiquement $\log_{10}$ et est définie pour $x > 0$ par

$$\boxed{\log_{10}(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(10)}}$$

Il s'agit de la fonction réciproque de $y \mapsto 10^y$, de sorte que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $\log_{10}(10^y) = y$, et pour tout $x > 0$ on a $10^{\log_{10}(x)} = x$.
Cette fonction est utilisée dans d'autres sciences, comme la SI (diagramme de Bode) ou la chimie, où par exemple le pH d'une solution est défini par la relation

$$pH = -\log_{10}\left([H^+]\right)$$

En informatique, vous avez peut-être croisé le logarithme en base 2, qui donne par exemple le nombre de chiffres dans l'écriture binaire d'un entier naturel n. En effet, n possède c chiffres dans cette écriture si et seulement si $2^{c-1} \leqslant n < 2^c$ ce qui équivaut encore par stricte croissance de $\log_2$ à

$$c - 1 \leqslant \log_2(n) < c$$

et donc $c = \lfloor \log_2(n) + 1 \rfloor$.

4 Fonctions hyperboliques

Définition. *Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, notée respectivement ch et sh, sont les parties paire et impaire de la fonction exponentielle. Elles sont donc définies sur* $\mathbb{R}$ *par les relations :*

$$\boxed{ch(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \qquad et \qquad \boxed{sh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

Théorème. *Les fonctions ch et sh sont infiniment dérivables, et vérifient pour tout réel* x *les relations suivantes :*

$$\boxed{ch'(x) = sh(x)} \qquad et \qquad \boxed{sh'(x) = ch(x)}.$$

En outre on a pour tout réel x, $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$.

dem : pour la dérivabilité et les dérivées, il s'agit d'une simple vérification. Pour la dernière relation, on peut au choix tout développer, ou bien remarquer que pour tout réel x,

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = (\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)) \left(\underbrace{\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)}_{e^x} \right) = (\mathrm{ch}(-x) + \mathrm{sh}(-x))\, e^x = e^{-x} e^x = 1.$$